



نمونه رایگان جزوه

ریاضی مدیریت

(فصل چهارم)

تالیف: دکتر حسن رضاپور

پشتیبانی:

www.pourshafi.com

فصل چهارم:

مشتق؛

تعریف: تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر است هرگاه:

(۱) $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد.

(۲) حد روبرو موجود باشد $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

تذکر:

(۱) به جای حد در شماره ۲ می توان از $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$ استفاده نمود.

$$\left(\frac{m+2}{r}\right) f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 - nh)}{rh} \quad (۲)$$

مثال ۱. اگر $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ کدام است؟ (حسابداری)

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{2}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{2} \quad (۳) \quad ۲ \quad (۴)$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 2x)(2x - 2)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^4}} \Rightarrow f'(4) = \frac{2(8)(6)}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{2(8)(6)}{3(8)(4)} = 2$$

مشتق چپ و راست:

$$\text{مشتق چپ: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^-)$$

$$\text{مشتق راست: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^+)$$

تذکر: $f(x)$ در x_0 مشتق پذیر است هرگاه:

(۱) در این نقطه پیوسته باشد.

(۲) مشتق چپ = مشتق راست

مثال ۲. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3-x & x \leq 2 \\ \frac{1}{x}x^2 - 1 & x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ چگونه است؟ (مدیریت)

(۱) ناپیوسته (۲) فاقد حد (۳) مشتق پذیر (۴) مشتق ناپذیر

گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{مشتق چپ: } (3-x)' = -1 \Rightarrow f'(2^-) = -1$$

$$\text{مشتق راست: } \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = -1 \Rightarrow f'(2^+) = 2$$

مشتق چپ \neq مشتق راست \Leftarrow مشتق ناپذیر

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2}x^2 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 - x = 1 \\ f(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ در } x = 2 \text{ پیوسته است.}$$

قواعد مشتق گیری:

۱) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

۲) $f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$ $y = (3x^2 - 8x)^4 \rightarrow y' = 4(6x - 8)(3x^2 - 8x)^3$

۳) $f(x) = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow f'(x) = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{n-m}}}$

مثلاتی:

۴) $f(x) = \cos u \Rightarrow f'(x) = -u' \sin u$

۵) $f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \cos u$

۶) $f(x) = \tan u \Rightarrow f'(x) = u'(1 + \tan^2 u)$

۷) $f(x) = \cot gu \Rightarrow f'(x) = -u'(1 + \cot^2 u)$

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$, $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

۸) $f(x) = \sec u = \frac{1}{\cos u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u' \sin u}{\cos^2 u} = u' \sin u \sec^2 u$

معکوس مثلثاتی:

۹) $f = \text{Arc sin } u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۰) $f(x) = \text{Arccos } u \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۱) $f(x) = \text{Arc tan } u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$

۱۲) $f(x) = \text{Arc cot } gu \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{1+u^2}$

هیپربولیک:

۱۳) $f(x) = \sinh(u) \Rightarrow f'(x) = u' \cosh(u)$

۱۴) $f(x) = \cosh(u) \Rightarrow f'(x) = u' \sinh(u)$ منفی ندارد

۱۵) $f(x) = \tanh(v) \Rightarrow f'(x) = u'(1 - \tanh^2(u))$

۱۶) $f(x) = \cot gh(v) \Rightarrow f'(x) = u'(1 - \cot^2 gh^2(u))$

توابع نمایی و لگاریتمی:

۱۷) $f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \cdot \ln a$ ** $f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$

۱۸) $f(x) = \log_a u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ** $f(x) = \ln u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$

۱۹) $f(x) = |u| \Rightarrow f'(x) = \frac{u'u}{|u|}, u \neq 0$

مثال ۳. مشتق عبارت $y = (1 + \cos 2x) \tan^2 x$ در $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۹۳)

۱ (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 x \rightarrow y = 2(\cos^2 x) \tan^2 x = 2\sin^2 x \rightarrow$

$$y' = 4\sin x \cos x = 2(\sin 2x) \Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

مثال ۴. در تابع $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} & x \geq 0 \\ x + \frac{b}{1-x} & x < 0 \end{cases}$ مقدار $f'(0)$ موجود است ab کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۶)

$$\begin{matrix} 2 & (۴) & \frac{1}{2} & (۳) & \frac{1}{4} & (۲) & -\frac{1}{2} & (۱) \end{matrix}$$

(۱) باید f در صفر پیوسته باشد.

(۲) مشتق چپ f در صفر = مشتق راست f در صفر

بررسی شرط پیوستگی

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ae^{-x} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{b}{1-x} = b \end{cases} \Rightarrow a = b \quad (1)$$

بررسی شرط مشتق پذیر

$$\begin{cases} f'(0^+) = (ae^{-x})' = -ae^{-x} \Big|_{x=0} = -a \\ f'(0^-) = \left(x + \frac{b}{1-x}\right)' = \left(1 + \frac{b}{(1-x)^2}\right) \Big|_{x=0} = 1+b \end{cases} \Rightarrow -a = 1+b \quad (2)$$

$$\begin{matrix} (1), (2) & a - b = 0 & b = -\frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow ab = \frac{1}{4} \\ & -a - b = 1 & \end{matrix}$$

قاعده مشتق تابع مرکب:

$$y = f \circ g(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

مثال ۵. اگر f تابعی حقیقی و مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $g(x) = f(xf(x))$ آنگاه $g'(0)$ برابر است با:

$$\begin{matrix} \cdot & (۴) & (f'(0))^2 & (۳) & f'(0) \cdot f(0) & (۲) & f'(0) + f(0) & (۱) \end{matrix}$$

$$g'(x) = (f(xf(x)))' = (xf(x))' \cdot f'(xf(x)) = (f(x) + xf'(x)) \cdot f'(xf(x))$$

$$g'(0) = (f(0) + 0 \cdot f'(0)) \cdot (f'(0 \cdot f(0))) = f(0) \cdot f'(0) \quad \text{گزینه ۲ صحیح است.}$$

قاعده مشتق گیری زنجیره ای

$$y = f(u), y = g(t), t = h(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

مثال ۶. اگر $x = \sqrt[3]{t}, U = \sqrt{x+3}, y = \sqrt{u+2}$ مقدار y'_t به ازای $t=1$ کدام است؟ حسابداری

$$\begin{matrix} 1 & (۴) & \frac{1}{16} & (۳) & \frac{1}{24} & (۲) & \frac{1}{48} & (۱) \end{matrix}$$

$$t=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow u=2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (\sqrt{u+2})'_u \cdot (\sqrt{x+3})'_x \cdot (\sqrt[3]{t})'_t =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Big|_{t=1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$$

مثال ۷. اگر $u = \sqrt{x^2 - 3}$, $y = e^u$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟ (حسابداری)

(۱) $\frac{1}{2}e$ (۲) $2e$ (۳) $-2e$ (۴) $-\frac{1}{2}e$

$$x = 2 \Rightarrow u = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^u\right) \times \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}\right)_{x=2} = (-e) \left(\frac{2}{1}\right) = -2e$$

مشتق پارامتری: اگر Y, X هر دو بر حسب متغیر سوی بر حسب t بیان شوند یعنی

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{ آنگاه: } y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \quad y''_x = \frac{g''f' - f''g'}{f'^3}$$

مثال ۸. اگر $x = t^2 + t$, $y = t^3 - 3t$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ به ازای $t = 1$ را بیابید. (حسابداری و مدیریت ۸۶)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{3t^2 - 3}{2t + 1} \Big|_{t=1} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t) \cdot f'(t) - f''(t) \cdot g'(t)}{(f'(t))^3} = \frac{6t(2t+1) - 2(3t^2-3)}{(2t+1)^3} \Big|_{t=1} = \frac{2}{3}$$

نکته: (اثبات فرمول $y''_x = \frac{g''f' - f''g'}{f'^3}$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{g'(t)}{f'(t)} \right) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{g''f' - f''g'}{f'^2}}{f'} = \frac{g''f' - f''g'}{f'^3} \end{aligned}$$

مثال ۹. اگر $\begin{cases} x = t^2 f(t) \\ y = \ln tg(t) \end{cases}$ آنگاه y''_x کدام است؟

(۱) $\frac{1}{t^3}$ (۲) $-\frac{1}{2t^3}$ (۳) $-\frac{1}{2t^4}$ (۴) $\frac{1}{t^2}$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{t}{2t} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} t^{-2}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-t^{-3}}{2t} = -\frac{1}{2t^4}$$

مشتق نمایی: موارد استفاده در حالات زیر قرار دارند:

(۱) توابع به فرم $y = f(x)^{g(x)}$

(۲) عوامل تابع زیاد باشند و بین آنها ضرب یا تقسیم باشد.

(۱) توابع به فرم $y = f(x)^{g(x)}$ برای مشتق گیری از دوطرف \ln می گیریم سپس عمل مشتق گیری را اعمال می نمائیم. ادامه توضیح با مثال بعدی.

مثال ۱۰. مشتق تابع $y = (x^2)^{x^2+1}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ۸۲ - حسابداری آزاد ۸۶)

۴ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

$$y = (x^2)^{x^2+1} \Rightarrow \ln y = \ln (x^2)^{x^2+1} = x^2 + 1 \ln x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = 2x \ln x^2 + \frac{(x^2+1)2x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = y \left(4x \ln x + \frac{2(x^2+1)}{x} \right) = (x^2)^{x^2+1} \left(4x \ln x + \frac{2(x^2+1)}{x} \right) \Big|_{x=1} = 4$$

مثال ۱۱. مشتق $y = x^{e^x}$ در $x = 1$ کدام است؟

e-1 (۴)

-e (۳)

e (۲)

e+1 (۱)

$$y = x^{e^x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{e^x} \Rightarrow \ln y = e^x \ln x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$$

$$\Rightarrow y' = y \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) = x^{e^x} \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) \Big|_{x=1} = e$$

(۲) عوامل زیاد باشند:

مثال ۱۲. از تابع زیر مشتق بگیرید.

$$y = \frac{(x^2+1)^4(x+1)(2x-7)}{(x+1)^2(2x^2+x)^3}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x^2+1)^4(x+1)(2x-7)}{(x+1)^2(2x^2+x)^3} = \ln(x^2+1)^4 + \ln(x+1) + \ln(2x-7) - \ln(x+1)^2 - \ln(2x^2+x)^3$$

$$= 4 \ln(x^2+1) + \ln(x+1) + \ln(2x-7) - 2 \ln(x+1) - 3 \ln(2x^2+x)$$

$$= 4 \ln(x^2+1) + \ln(x+1) + \ln(2x-7) - 2 \ln(x+1) - 3 \ln(2x^2+x) = \ln y$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = \frac{8x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-7} - \frac{2}{x+1} - \frac{6x}{2x^2+x} = \frac{y'}{y}$$

$$y' = y \left(\frac{8x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-7} - \frac{2}{x+1} - \frac{6x}{2x^2+x} \right) =$$

$$y' = \frac{(x^2+1)^4(x+1)(2x-7)}{(x+1)^2(2x^2+x)^3} \left(\frac{8x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-7} - \frac{2}{x+1} - \frac{6x}{2x^2+x} \right)$$

مشتق گیری ضمنی: مشتق تابع $y = f(x)$ یک رابطه صریح بر حسب y, x که در یک طرف y و طرف دیگر تابعی بر حسب x است مورد مطالعه قرار دادیم. گاهی رابطه صریحی بین y, x نداریم در این موارد تمامی جملات را یک طرف تساوی برده و سمت دیگر صفر داریم. لذا $F(x, y) = 0$ ظاهر می شود. آنگاه:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad x'_y = -\frac{F'_y}{F'_x}$$

F'_x : یعنی مشتق گیری از عبارت F بر حسب x که y را مثل عدد ثابت در نظر می گیریم.

F'_y : یعنی مشتق گیری از عبارت F بر حسب y که x را مثل عدد ثابت در نظر می گیریم.

مثال ۱۳. از رابطه $x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x = 8$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه (2,1) کدام است؟ (مدیریت)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 3y + 4}{4y - 3x} \Big|_{(2,1)} = \frac{4 - 3 + 4}{4 - 6} = \frac{5}{2}$$

مثال ۱۴. تابع ضمنی حقیقی $e^x + e^y - xe^{2x} - e^{2y} - 1 = 0$ مفروض است. y'_x در (0,0) کدام است؟ (مدیریت)

۰) ۲- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{e^x - e^{2x} - 2xe^{2x}}{e^y - 2e^{2y}} \Big|_{(0,0)} = 0$$

مثال ۱۵. مشتق تابع $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$ برابر است با:

۱) $y' = \frac{1}{2y+2}$ ۲) $y' = \frac{1}{y+1}$ ۳) $y' = \frac{1}{2y-1}$ ۴) $y' = \frac{1}{y-1}$

$$y = \sqrt{x+y} \Rightarrow y^2 = x+y \Rightarrow y^2 - x - y = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{-1}{2y-1} = \frac{1}{2y-1}$$

مشتق یک تابع نسبت به تابع دیگر: مشتق تابع f نسبت به تابع g برابرست با:

$$\frac{d(f(x))}{d(g(x))} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{\frac{dg(x)}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یعنی نسبت سرعت تغییرات f (نرخ تغییرات f) به سرعت تغییرات g

مثال ۱۶. نرخ تغییر تابع $\sqrt{x^2 + 3x}$ نسبت به $\frac{x}{x+1}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$\frac{d(\sqrt{x^2 + 3x})}{d(\frac{x}{x+1})} = \frac{\frac{d(\sqrt{x^2 + 3x})}{dx}}{\frac{d(\frac{x}{x+1})}{dx}} = \frac{\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}} \Big|_{x=1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$$

مثال ۱۷. نرخ تغییر تابع $y = \ln(1+x^2)$ نسبت به تابع $g(x) = \ln(x+3)$ در $x=2$ برابر است با: (اقتصاد)

$$\frac{5}{6} \quad (۴) \qquad \frac{8}{3} \quad (۳) \qquad ۴ \quad (۲) \qquad ۳ \quad (۱)$$

$$\frac{d(\ln(1+x^2))}{d(\ln(x+3))} = \frac{\frac{d(\ln(1+n^2))}{dx}}{\frac{d(\ln(x+3))}{dx}}$$

$$= \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x+3}} \bigg|_{x=2} = \frac{4}{\frac{5}{5}} = 4$$

مشتق تابع معکوس:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \qquad f(a) = b \text{ به شرط}$$

مثال ۱۸: اگر $f(x) = x^3 + x^2$ مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای به طول ۱۲ واقع بر آن را بیابید.

$$(f^{-1})'(12) = ? = \frac{1}{f'(a)} \qquad f(a) = 12 \qquad \Rightarrow 12 = x^3 + x^2 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = x^3 + x^2 \Rightarrow f' = 3x^2 + 2x$$

$$(f^{-1})'(12) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3x^2 + 2x} \bigg|_{x=2} = \frac{1}{16}$$

مشتق مراتب بالاتر: مشتق اول f' ، مشتق دوم f'' و ... و مشتق n ام $f^{(n)}$

$$f(x) = \sin ax \Rightarrow f^n(x) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$$

$$f(x) = \cos ax \Rightarrow f^n(x) = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$$

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + m \Rightarrow f^n(x) = an!$$

$$f(x) = e^{ax} \Rightarrow f^n(x) = a^n e^{an}$$

مثال ۱۹. مشتق n ام $y = \sin x$ برابر است با:

$$\sin(x + n \frac{\pi}{2}) \quad (۴) \qquad (-1)^n \sin(x + n \frac{\pi}{2}) \quad (۳) \qquad (-1)^n \cos(x + \frac{n\pi}{2}) \quad (۲) \qquad \cos(x + n \frac{\pi}{2}) \quad (۱)$$

با توجه به فرمول گزینه ۴ صحیح است. ولی می‌توان $n=1$ پس مشتق اول $y = \sin x$ برابر است با $y' = \cos x$ با چک کردن $n=1$ در گزینه‌ها فقط گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f^n(x) = e^x(n+x)$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \text{ مهم}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^n(x) = \frac{(-c)^{n-1}n!(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}} \text{ مهم}$$

اگر مشتق n ام را در $x = a$ خواستند کار ساده است. ابتدا $n = 1$ قرار داده یعنی مقدار مشتق اول را به ازای $x = a$ بدست می آوریم و در گزینه ها $n = 1$ و رد گزینه می کنیم. اگر جواب نداد $n = 2$ و... ولی اگر مشتق دهم، بیستم، ... را خواستند باید فرمول ها را حفظ باشیم و یا با استفاده از مشتق گیری به روند مناسبی دست پیدا کنیم.

www.pourshafi.com