



نمونه رایگان جزوه

آمار و کاربرد آن در مدیریت

(فصل دوم)

تالیف: دکتر حسن رضاپور

پشتیبانی:

www.pourshafi.com

فصل دوم: آنالیز ترکیبی

(imp)

نماد فاکتوریل: حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با نماد n! نمایش می‌دهیم.

قرارداد: 0! = 1

- مثال: عبارات زیر را ساده کنید:

$$\text{الف) } \frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{(m-1)!}{(n+2)(n+1)(n)(n-n!)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\text{ب) } \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n^2 - n$$

اصل اساسی شمارش: اگر عملی به n_1 طریق مختلف به دنبال آن عملی به n_2 طریق مختلف و متعاقب آن عمل سومی به n_3 طریق مختلف و... انجام شود، تعداد طرقی که این اعمال با یکدیگر انجام می‌شوند، از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \quad (\text{ضرب، اشتراک و})$$

- مثال: تعداد طرقی که هر یک از موارد زیر انجام می‌شوند را بدست آورید؟

$$\boxed{2} \times \boxed{2} = 4$$

الف) پرتاب دو سکه

$$\boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} = 8$$

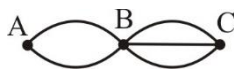
ب) پرتاب سه سکه

$$\boxed{2} \boxed{2} \boxed{6} = 24$$

ج) پرتاب دو سکه و یک تاس

$$\boxed{6} \boxed{6} = 36$$

د) پرتاب دو تاس



$$\boxed{2} \boxed{3} = 6$$

ه) رفتن از شهر A به C

- مثال: با اعداد ۱، ۵، ۶، ۷ و ۸ با تکرار و بدون تکرار ارقام.

الف) چند عدد سه رقمی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{5} \times \boxed{5} \times \boxed{5} = 125 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{5} \times \boxed{5} \times \boxed{3} = 75 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{3} = 36 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{5} \times \boxed{5} \times \boxed{2} = 50 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} = 24 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{5} = 50 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 24 \end{array} \right.$$

ج) چند عدد سه رقمی زوج:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{5} \times \boxed{5} \times \boxed{2} = 50 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} = 24 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{5} = 50 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 24 \end{array} \right.$$

د) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۷۰۰

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{5} = 50 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 24 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{5} = 50 \\ \text{بدون تکرار: } \boxed{2} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 24 \end{array} \right.$$

- مثال ۲: با اعداد ۱ و ۵ و ۶ و ۷ و ۰ با تکرار و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد سه رقمی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } 4 \times 5 \times 5 = 100 \\ \text{بدون تکرار: } 4 \times 4 \times 3 = 48 \end{array} \right.$$

ب) چند عدد سه رقمی زوج

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } 4 \times 5 \times 2 = 40 \\ \text{بدون تکرار: } 4 \times 3 \times 1 + 3 \times 3 \times 1 = 12 + 9 = 21 \end{array} \right.$$

ج) چند عدد سه رقمی فرد

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } 4 \times 5 \times 3 = 60 \\ \text{بدون تکرار: } 3 \times 3 \times 4 = 27 \end{array} \right.$$

د) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۷۰۰

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{با تکرار: } 1 \times 5 \times 5 = 25 - 1 = 24 \\ \text{بدون تکرار: } 1 \times 4 \times 3 = 12 \end{array} \right.$$

جایگشت n شیئی: تعداد طرقی که n شیئی می تواند در کنار هم قرار گیرند را جایگشت n شیئی نامیم و از رابطه روبرو بدست می آید:

$$P(n) = n!$$

- مثال: با سه حرف a, b, c چند کلمه سه حرفی می توانیم بنویسیم؟

$$P(3) = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

تذکر (۱) تعداد طرقی که n نفر دور یک میزگرد قرار می یگرند از رابطه $(n-1)!$ بدست می آید.

مثال: سه نفر به چند طریق دو ریک میزگرد قرار می گیرند؟ $(3-1)! = 2! = 2$

مثال: دو دانشجوی فوق لیسانس و ۳ دانشجوی لیسانس به چند طریق می توانند:

$$5! = 120$$



$$3! \times 3! = 36$$

برای جایابی لیسانسها



$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

$$2! \times 3! \times 2! = 24$$

$$\boxed{3} \triangle \boxed{2} \triangle \boxed{1} = 12$$

الف) در یک ردیف قرار گیرند؟

ب) به گونه ای در کنار هم قرار گیرند که دانشجویان لیسانس در کنار هم باشند.

ج) به گونه ای که دانشجویان فوق لیسانس در کنار هم باشند.

۲! برای جایابی فوقها با هم

د) دانشجویان هم مقطع در کنار هم باشند.

ه) لیسانسها در کنار هم نباشند.

$$72 = 120 - 48 = \text{ج} - \text{الف}$$

د) فوق لیسانسها در کنار هم نباشند.

تذکر ۲) اگر n شیئی شامل n_1 از نوع اول، n_2 از نوع دوم و... n_k از نوع k ام با شد، آنگاه تبدیل n شی از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

مثال: با سه حروف aab چند کلمه سه حرفی می توانیم بنویسیم؟

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

ترتیب r شیئی از n شیئی ($r \leq n$):

تعداد طرقی که r شیئی، از n شیئی را می توانیم انتخاب نمائیم به گونه ای که جابجایی اشیاء حالت جدید را به وجود بیاورد. (ترتیب قرار گرفتن اهمیت دارد) را ترتیب r شیئی از n شیئی گفته و از رابطه زیر بدست می آوریم.

$$P_n^r = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تذکر ۱) اصل اساسی شمارش از ترتیب کاملتر بوده و عملاً ترتیب کاربردی ندارد.

تذکر ۲) ترتیب r شیئی از n شیئی شامل جایگشت های بدون تکرار r شیئی از n شیئی است.

تذکر ۳) جایگشت های با تکرار r شیئی از n شیئی از دستور n^2 بدست می آید.

تذکر ۴) ترتیب n شیئی از n شیئی برای تبدیل n شیئی است و یا:

$$P(n) = P_n^n \quad \text{ترتیب} = \text{جایگشت بدون تکرار}$$

مثال: با اعداد ۱ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ با تکرار و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی می توانیم بنویسیم؟

$$\text{با تکرار} \quad \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} = 125 \quad n^3 = 5^3 = 125$$

$$\text{بدون تکرار} \quad \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} = 60 \quad P_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

ترکیب r شیئی از n شیئی ($r \leq n$): تعداد طرقی که r شیئی از n شیئی را می توانیم انتخاب نمائیم به گونه ای که جابجایی اشیاء حالت جدید را بوجود نیاورد (ترکیب انتخاب اهمیت دارد) را ترکیب r شیئی از n شیئی گفته و از دستور زیر بدست می آوریم:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

تذکر ۱) برای تشخیص مسئله ترتیب و ترکیب بدون توجه به n, r دو شیئی را انتخاب نموده و جابجا می کنیم، اگر حالت جدیدی بوجود آید مسئله از نوع ترتیب است (ترتیب قرار گرفتن اهمیت دارد). و اگر حالت جدیدی بوجود نیامد، مسئله از نوع ترکیب است. (ترکیب انتخاب مهم است)

حسابداری و مدیریت ۹۲) با حروف average چند رمز عبور چهار حرفی می توان ساخت؟

$$\text{غیر تکراری} \quad \binom{5}{4} \times 4! = 120$$

$$\text{تکراری} \begin{cases} aa \binom{4}{2} = \binom{4}{2} \times \frac{4!}{2} = 72 \\ ee \binom{4}{2} = \binom{4}{2} \frac{4!}{2} = 72 \\ aae e = \frac{4!}{2!} = 6 \end{cases}$$

$$120 + 72 + 72 + 6 = 270$$

$$n=9, r=5$$

مثال: اعداد ۱ تا ۹، ساخت اعداد ۵ رقمی:

2112 ← «ترتیب»

$$n=9, r=5$$

مثال- افراد ۱ تا ۹، ساخت گروه ۵ نفری:

جابجایی حالت جدیدی بوجود نمی‌آورد ← ترکیب.

تذکر ۲:

$$1) \binom{n}{n} = 1 \quad 2) \binom{n}{0} = 1 \quad 3) \binom{n}{n} = 1 \quad 4) \binom{n}{1} = n \quad 5) \binom{n}{n-1} = n$$

$$6) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad 7) s+t=n \Rightarrow \binom{n}{s} = \binom{n}{t} \binom{8}{3} = \binom{8}{5} \quad 8) r! C_n^2 = P_n^2 \quad 9) C_n^r = \frac{1}{r!} P_n^r$$

تذکر: تعداد طرقی که n شیئی یکسان را می‌توان در k محل قرار داد بطوریکه هیچ محلی بدون شیئی نباشد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

- مثال: در یک جعبه ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب قرار دارد. به چند طریق می‌توانیم:

الف) سه لامپ انتخاب نماییم.

$$n=10 \rightarrow \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

ب) سه لامپ را انتخاب کنیم به گونه‌ای که هیچیک معیوب نباشد؟

$$\binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 1 \times \frac{6!}{3!3!} = 20$$

ج) فقط یکی معیوب باشد (از سه لامپ)

$$\binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = 4 \times \frac{6!}{2!4!} = 2 \times 6 \times 5 = 60$$

د) حداقل یکی معیوب باشد. (از سه لامپ)

x = تعداد معیوب

حداکثر $a \leq x \leq b \rightarrow$ حداقل

$$(x \geq 1): \binom{4}{1} \binom{6}{2} + \binom{4}{2} \binom{6}{1} + \binom{4}{3} \binom{6}{0} = A$$

$$\text{کل حالات: } \binom{10}{3} = \overbrace{\binom{4}{1} \binom{6}{1} + \binom{4}{2} \binom{6}{1} + \binom{4}{3} \binom{6}{0}}^A + \binom{4}{0} \binom{6}{3}$$

$$\rightarrow A = \binom{10}{3} - \binom{4}{0} \binom{6}{3} = 120 - 20 = 100$$

ه) حداکثر یکی معویب باشد

$$x \leq 1 \quad \binom{4}{0} \binom{6}{3} + \binom{4}{1} \binom{6}{2} = 20 + 60 = 80$$

و) حداکثر دو تا معویب باشد

$$x \leq 2 \quad \binom{4}{0} \binom{6}{3} + \binom{4}{1} \binom{6}{2} + \binom{4}{2} \binom{6}{1} = 20 + 60 + 36 = 116$$

نکته: *تعداد حالات توزیع:

n گلوله متمایز در r کیسه متمایز برابرست با r^n

* n گلوله مشابه در r کیسه متمایز برابرست با $\binom{n+r-1}{r-1}$ که با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله

$$(x_1 + \dots + x_r = n) \quad x_i \geq 0 \text{ نیز برابرست.}$$

* n گلوله مشابه در r کیسه که هر کیسه حداقل یک گلوله بگیرد که با تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله

$$x_i > 0, (x_1 + \dots + x_r = n) \text{ را میتوان از رابطه زیر یافت:}$$

$$\binom{n-1}{r-1}$$